Пентагональное тождество Эйлера

Во всех задачах, связанных с разбиением на слагаемые, считается, что все слагаемые натуральные и (если не сказано иное) могут повторяться, а порядок их следования не важен.

1. Докажите, что для каждого натурального числа его количество разбиений в сумму попарно различных слагаемых равно количеству разбиений на нечётные слагаемые.

Рассмотрим всевозможные разбиения числа n на натуральные слагаемые и обозначим через $p(n)$ количество всех таких разбиений.

2. Докажите, что число разбиений на k слагаемых равно количеству разбиений, в которых наибольшее равно k.
3. Докажите неравенство $p(n+2)+p(n) \geqslant 2p(n+1)$.
4. Докажите, что при $n \neq \frac{3k^2 \pm k}{2}$ количество разбиений n на сумму чётного числа различных слагаемых равно количеству разбиений n на сумму на нечётного числа различных слагаемых, а при $n = \frac{3k^2 \pm k}{2}$ разбиений на сумму чётного числа слагаемых на $(-1)^k$ больше.
5. Докажите тождество Эйлера $\prod\limits_{n=1}^{\infty}(1-x^n) = \sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty}(-1)^n x^{\frac{3n^2+n}{2}}$.
6. Положим $\varphi(x) = \prod\limits_{n=1}^{\infty}(1-x^n)$ и $\pi(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} p(n)x^n$, где $p(0)=1$. Докажите тождество $\varphi(x)\pi(x) = 1$.
7. Вычислите $p(13)$.

Задачки на разбиения

8. У ослика Иа-Иа есть k палочек натуральной длины, сумма длин которых равна n. Ослик хочет выломать из них k палочек: длины 1, длины 2, ..., длины k. При каком наименьшем n Иа-Иа заведомо сможет это сделать?
9. В обращении есть монеты достоинством в 1, 2, 5, 10, 20, 50 копеек и 1 рубль. Известно, что k монетами можно набрать m копеек. Докажите, что m монетами можно набрать k рублей.
10. На доске написано несколько целых положительных чисел: a_0, a_1, a_2, ..., a_n. На другой доске пишут числа: b_0 – сколько чисел на первой доске, b_1 – сколько там чисел, больших единицы, b_2 – сколько чисел, больших двойки, и т.д., пока они положительны. На третьей доске пишут числа c_0, c_1, c_2, ..., построенные по числам второй доски по тому же правилу. Докажите, что наборы чисел на первой и третьей досках совпадают.
11. Назовём лестницей высоты n фигуру, состоящую из клеток квадрата $n \times n$, лежащих не выше диагонали. Сколькими способами можно

разбить лестницу высоты n на несколько прямоугольников, стороны которых идут по линиям сетки, а площади попарно различны?

12. Даны две таблицы A и B размера $m \times n$. В каждой клетке каждой таблицы записано одно из чисел 0 или 1, причём в строках таблиц числа не убывают слева направо, и в столбцах таблиц числа не убывают сверху вниз. Известно, что при любом $k = \overline{1, m}$ сумма чисел в верхних k строках таблицы A не меньше суммы чисел в верхних k строках таблицы B, а также, что всего в таблице A столько же единиц, сколько в таблице B. Докажите, что при любом $\ell = \overline{1, n}$ сумма чисел в левых ℓ столбцах таблицы A не больше суммы чисел в левых ℓ столбцах таблицы B.
13. Число A делится на $1, 2, 3, \ldots, 9$. Докажите, что если $2A$ представлено в виде суммы натуральных чисел, меньших 10, то можно выбрать несколько слагаемых с суммой A.
14. Разбиение $n = x_1 + \ldots + x_m$ назовём совершенным, если каждое число от 1 до n однозначно представляется в виде суммы нескольких x_i. Докажите, что количество совершенных разбиений числа n равно количеству разложений числа $n+1$ на множители, бóльшие единицы.
15. Докажите, что количество разбиений числа n, в которых могут повторяться только нечётные части, равно количеству разбиений, в которых нет частей, встречающихся больше трёх раз.
16. Докажите, что количество разбиений n на не более чем m частей равно количеству разбиений $n + \frac{m(m+1)}{2}$ на m различных частей.

Формула крюков

Диаграмма Юнга, состоящая из n клеток и заполненная числами от 1 до n так, что числа возрастают при движении слева направо и сверху вниз, называется **таблицей Юнга**. Количество способов превратить диаграмму Юнга в таблицу – её **количество заполнений**. **Крюк клетки** – это она сама, а также клетки, расположенные справа от нее, и клетки, расположенные снизу. **Длина крюка** – это количество его клеток.

17. Пусть диаграмма Юнга сама является крюком. Сколько у неё есть заполнений?
18. Найдите количество заполнений диаграммы–прямоугольника $2 \times n$.
19. Докажите, что любой антисимметрический многочлен $g(x, y)$ имеет вид $g(x, y) = (x - y)h(x, y)$ для некоторого симметрического многочлена $h(x, y)$.
20. Докажите **формулу Крюков**: количество заполнений диаграммы равно факториалу количества ее клеток, деленному на произведение длин всех её крюков.